

★

Exercice 1

Voir correction

Le but de cet exercice est de démontrer la formule du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques. On admet que cet ensemble muni de la somme et du produit défini ci-dessous est un \mathbb{R} -espace vectoriel :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

On considère deux réels a et b tels que l'équation $r^2 = ar + b$ n'admet aucune solution réelle, et on s'intéresse à l'ensemble F de toutes les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Soit φ l'application de F vers \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad F &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

- a) Montrer que φ est injective.
 - b) Montrer que φ est surjective.
 - c) En déduire que $\dim(F) = 2$.
- 3) On cherche maintenant à déterminer une base de F .

Soient $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ les deux solutions complexes de l'équation $r^2 = ar + b$, avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier naturel n :

$$x_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad y_n = \rho^n \sin(n\theta)$$

- a) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans F .
 - b) Montrer que $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille libre de F .
 - c) En déduire que $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille génératrice de F .
- 4) En déduire que pour toute suite numérique (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta)$$

★ ★

Exercice 2

Voir correction

Le but de cet exercice est de retrouver un résultat du cours sur les racines n -èmes de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$ en raisonnant par analyse-synthèse.

- 1) On suppose dans cette question que z est un nombre complexe vérifiant $z^n = 1$. On rappelle qu'il existe un réel $\rho > 0$ et un réel θ tels que $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.
 - a) Montrer que $|z|^n = 1$ puis que $\rho = 1$.
 - b) Justifier que $n\theta$ est un multiple de 2π . En déduire qu'il existe un entier relatif m tel que $\theta = \frac{2m\pi}{n}$.
 - c) Montrer qu'il existe un entier k dans $\{0, \dots, n-1\}$ tel que $m - k$ est un multiple de n . On pourra utiliser la division euclidienne de m par n .
 - d) En déduire que z peut s'écrire :

$$z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

avec k un entier dans $\{0, \dots, n-1\}$.

- 2) On suppose dans cette question que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Vérifier que $z^n = 1$.

- 3) Application : soit $c = 3 - 4i$. On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^5 = c$.
- Déterminer $\rho > 0$ et θ deux réels tels que $c = \rho e^{i\theta}$.
 - On pose $\omega = \rho^{\frac{1}{5}} e^{\frac{i\theta}{5}}$. Vérifier que :

$$z^5 = c \iff \left(\frac{z}{\omega}\right)^5 = 1$$

- c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = c$.

★ ★ ★
Exercice 3

Voir correction

(oraux ENS 2018)

Soit $k \geq 2$ un entier et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$

- Soit $j \geq 0$ un entier. Si j est un multiple de k , que vaut ω^j ?
- Pour tout entier $0 \leq \ell \leq k-1$, montrer que $|1 + \omega^\ell| = |\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}| = 2 \left| \cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) \right|$
- Soit $j \geq 0$ un entier. Calculer la quantité

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$

suivant si j est un multiple de k ou non.

- 4) Montrer que :

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n \binom{n}{j} = \frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n$$

- 5) Soit X_n le nombre de piles obtenus dans une succession de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que la probabilité que X_n soit un multiple de k converge lorsque $n \rightarrow +\infty$ et calculer la limite.

★
Exercice 4

Voir correction

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer que c'est une fonction de répartition d'une variable à densité X , et préciser une densité de X :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$

2) Soit $A > 0$ un réel fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{A}\right)^n & \text{si } x \in [0, A] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > A \end{cases}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sin\left(\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}\right)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^2 - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

★ ★
Exercice 5

Voir correction

- 1) Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx$ converge.

- 2) En déduire qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} \gamma \times \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est une fonction densité de probabilité.

- 3) Soit X une variable aléatoire à densité de densité f . Montrer que X admet une espérance et une variance (on ne demandera pas de les calculer).

★ ★ ★
Exercice 6

— Voir correction —

- 1) Montrer que pour tout x dans \mathbb{R} privé de $\{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = -\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor$
- 2) Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^4} dx$ converge.
- 3) En déduire qu'il existe un réel α tel que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{\alpha}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^4}$ est une fonction densité de probabilité.
- 4) Soit X une variable aléatoire à densité de densité f .
 - a) Justifier que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ sans calcul.
 - b) Justifier que X admet une variance, puis montrer que :

$$V(X) \geq 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + (x + \frac{1}{2})^4} dx$$

★ ★ ★
Exercice 7

— Voir correction —

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.
- 2) Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X .

Correction des exercices

Correction de l'exercice 2 :

- 1) a) $1 = |z^n| = |z|^n = \rho^n$ donc $\rho^n = 1$. La seule solution dans \mathbb{R}^{+*} de l'équation $x^n = 1$ est 1 donc $\rho = 1$.
 - b) On a désormais $z = e^{i\theta}$. Comme $z^n = 1$, alors $e^{in\theta} = 1$ donc $n\theta$ est un multiple de 2π . Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2m\pi$ donc $\theta = \frac{2m\pi}{n}$.
 - c) Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de m par n , alors $m = qn + k$ avec $k < n$ donc $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a donc $m - k = qn$ donc $m - k$ est un multiple de n .
 - d) On en déduit que $z = e^{\frac{2(qn+k)\pi}{n}} = e^{2q\pi} e^{2k\pi/n} = e^{2k\pi/n}$ car $e^{2q\pi} = 1$ pour tout entier q .
- 2) $z^n = (e^{2ik\pi/n})^n = e^{2ik\pi} = 1$.

Correction de l'exercice 3 :

- 1) Si $j = mk$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\omega^j = (e^{2i\pi/k})^{mk} = e^{2im\pi} = 1$.
- 2) Il faut factoriser par $\omega^{\ell/2}$:

$$\begin{aligned}
 |1 + \omega^\ell| &= |\omega^{\ell/2}| \times |\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}| \\
 &= |\omega|^{\ell/2} \times |e^{2i\ell\pi/2k} + e^{-2i\ell\pi/2k}| \\
 &= |e^{i\ell\pi/k} + e^{-i\ell\pi/k}| \\
 &= \left| 2 \cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) \right| \\
 &= 2 \left| \cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) \right|
 \end{aligned}$$

- 3) Soit $j \geq 0$. Si j n'est pas un multiple de k alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} (\omega^j)^\ell \\
 &= \frac{1 - \omega^{jk}}{1 - \omega^j} \\
 &= \frac{1 - 1}{1 - \omega^j} && \text{d'après la question 1 car } jk \text{ est un multiple de } k \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et si j est un multiple de k alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\omega^{\ell j} = 1$ car ℓj est un multiple de k aussi, donc la somme vaut

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} 1 \\
 &= k
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ n'est pas un multiple de } k \\ k & \text{si } j \text{ est un multiple de } k \end{cases}$$

- 4) Partons du membre de droite :

$$\frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^{\ell j} \times 1^{n-j} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \times S_j
\end{aligned}$$

$$\text{avec } S_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ n'est pas un multiple de } k \\ k & \text{si } j \text{ est un multiple de } k \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n \binom{n}{j} k \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n \binom{n}{j}
\end{aligned}$$

5) On a :

$$\begin{aligned}
P(X_n \text{ est un multiple de } k) &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n P(X_n = j) \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^n \binom{n}{j} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n \right) \\
&= \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n
\end{aligned}$$

donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left| P(X_n \text{ est un multiple de } k) - \frac{1}{k} \right| &= \frac{1}{2^n k} \left| \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n \right| \\
&\leq \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=1}^{k-1} |1 + \omega^\ell|^n && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=1}^{k-1} 2 \left| \cos\left(\frac{\pi \ell}{k}\right) \right| && \text{d'après la question 2} \\
&\leq \frac{1}{2^n k} \sum_{\ell=1}^{k-1} 2 && \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq 1 \\
&\leq \frac{2(k-1)}{2^n k}
\end{aligned}$$

Oet $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(k-1)}{2^n k} = 0$ donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \text{ est un multiple de } k) - \frac{1}{k} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \text{ est un multiple de } k) = \frac{1}{k}$.

Correction de l'exercice 4 :

- 1) — Continue sur \mathbb{R} ? Oui par produit et somme de fonction continues.
 — \mathcal{C}^1 ? Oui sur \mathbb{R} par produit et somme de fonction \mathcal{C}^1 .
 — Limites en $-\infty$ et $+\infty$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

— Croissante ? Oui car arctan est croissante sur \mathbb{R} .

donc c'est bien la fonction de répartition d'une variable X à densité, une densité de X est f avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- 2) — Continue sur \mathbb{R} ? Elle est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $[0, A]$ et sur $]A, +\infty[$ car elle est définie par des opérations usuelles sur des fonctions continues sur chacun de ces intervalles.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0).$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow A^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow A^-} F(x) = 1 \quad \text{et} \quad F(A) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow A} F(x) = F(A).$$

F est donc continue aussi en 0 et en A , donc elle est bien continue sur \mathbb{R} .

— \mathcal{C}^1 ? Oui sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, A[$ et sur $]A, +\infty[$ par opérations sur des fonctions \mathcal{C}^1 . F est donc \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en A .

— Limites en $-\infty$ et $+\infty$? Constante égale à 0 sur $]-\infty, 0[$ et constante égale à 1 sur $]A, +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

— Croissante ? Constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]A, +\infty[$ et croissante sur $[0, A]$ par composition de fonctions croissantes, donc croissante sur \mathbb{R} par continuité.

C'est donc bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{n}{A} \left(\frac{x}{A}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0, A] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, A] \end{cases}$$

3)

- 4) — Continue sur \mathbb{R} ? Pour tout réel x , $2 + 2e^x > 0$ donc $x \mapsto \frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}$ est continue sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Par composition avec sin qui est continue sur \mathbb{R} , F est donc continue sur \mathbb{R} .

— \mathcal{C}^1 ? Oui \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} comme composition d'une fonction quotient de fonctions \mathcal{C}^1 dont le dénominateur ne s'annule pas par la fonction sin qui est aussi \mathcal{C}^1 .

— Limites en $-\infty$ et $+\infty$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi e^x}{2 + 2e^x} = 0$ par opérations, et $\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x} = \frac{\pi}{2e^{-x} + 2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi e^x}{2 + 2e^x} = \frac{\pi}{2}$ par opérations.

Par composition avec sin et par continuité en 0 et $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \sin(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sin(\pi/2) = 1$.

— Croissante ? F est \mathcal{C}^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, :

$$F'(x) = \frac{\pi e^x(2 + 2e^x) - \pi e^x \times 2e^x}{(2 + 2e^x)^2} \times \cos\left(\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}\right) = \frac{2\pi e^x}{(2 + 2e^x)^2} \times \cos\left(\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2\pi e^x}{(2 + 2e^x)^2} \geq 0$ donc $F'(x)$ est du signe de $\cos\left(\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}\right)$. Or pour tout réel x , $2 + 2e^x \geq 2e^x$ donc

$0 \leq \frac{1}{2 + 2e^x} \leq \frac{1}{2e^x}$ et donc $0 \leq \frac{\pi e^x}{2 + 2e^x} \leq \frac{\pi e^x}{2e^x} \leq \frac{\pi}{2}$. Pour tout θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\theta) \in [0, 1]$ donc finalement $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) \geq 0$ et donc F est croissante sur \mathbb{R} .

F est donc bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Un densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2\pi e^x}{(2 + 2e^x)^2} \times \cos\left(\frac{\pi e^x}{2 + 2e^x}\right)$$

- 5) — Continue sur \mathbb{R} ? F est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $[0, 2]$ et sur $]2, +\infty[$ par opérations sur des fonctions usuelles continues.
- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 \text{ et } F(0) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$$
- $$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = 1 \text{ et } F(2) = 1.$$
- F est donc aussi continue en 0 et en 2, donc finalement elle est continue sur \mathbb{R} .
- \mathcal{C}^1 ? F est \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, 0[$, sur $[0, 2]$ et sur $]2, +\infty[$ par opérations sur des fonctions usuelles \mathcal{C}^1 . Elle est donc \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 2.
- Limites en $-\infty$ et $+\infty$? F est constante égale à 0 sur $]-\infty, 0[$ et constante égale à 1 sur $]2, +\infty[$ onc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- Croissante ? F est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$ donc croissante sur ces intervalles.
- Sur $[0, 2]$, F est dérivable et : $\forall x \in [0, 2], F'(x) = \frac{e^x}{e^2 - 1} \geq 0$
- donc F est croissante sur $[0, 2]$ aussi, donc finalement croissante sur \mathbb{R} par continuité.
- F est donc bien la fonction de répartition d'une variable à densité X . Une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^2 - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 :

- 1) L'intégrale présente deux impropriétés, en 0 et en $+\infty$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $\frac{x + \ln^2(x)}{2^x} \geq 0$.
- Au voisinage de 0, $\frac{x + \ln^2(x)}{2^x} \sim \ln^2(x)$ car $x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln^2(x)$ et $2^x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$.
- De plus, $x^{1/2} \ln^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée donc $\ln^2(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge comme $\frac{1}{2} < 1$. On en conclut d'après les théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives que $\int_0^1 \ln^2(x) dx$ converge puis que $\int_0^1 \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx$ converge.
- Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln^2(x) = o(x)$ donc $x + \ln^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ donc $\frac{x + \ln^2(x)}{2^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2^x} = x e^{-x \ln(2)}$.
- Or $x^3 e^{-x \ln(2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée donc $x e^{-x \ln(2)} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge car $2 > 1$ donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives $\int_1^{+\infty} x e^{-x \ln(2)} dx$ converge puis $\int_1^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx$ converge.
- On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx$ converge.
- 2) Il suffit de poser $\gamma = \left(\int_0^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx\right)^{-1}$ pour avoir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut $\gamma \int_0^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x} dx = \gamma \times \gamma^{-1} = 1$. De plus f est bien continue et positive sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 par opérations, donc f est bien une fonction densité de probabilité.
- 3) Pour tout $x \geq 0$ $x^2 f(x) = \gamma \frac{x^3 + x^2 \ln^2(x)}{2^x}$ et $x^2 \ln^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x^2 \ln^2(x)}{2^x} = 0$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est donc faussement impropre en 0.
- Au voisinage de $+\infty$, $x^2 f(x) \sim \frac{x^3}{2^x} = x^3 e^{-x \ln(2)}$ et comme $x^5 e^{-x \ln(2)} x \rightarrow [x \rightarrow +\infty] 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge par le critère de Riemann et le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.
- On en conclut que $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge, donc comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge. Ainsi X admet un moment d'ordre 2 donc admet une variance et donc aussi une espérance.

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Soit x un réel tel que $x \notin \{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et soit $n = \lfloor x \rfloor$. On distingue deux cas, ou bien $n \leq x < n + \frac{1}{2}$ ou bien $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$.
- **1er cas :** $n \leq x < n + \frac{1}{2}$
- On a alors d'une part :

$$n \leq n + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$$

donc $x + \frac{1}{2}$ est dans l'intervalle $[n, n + 1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$.

Et d'autre part

$$-n - \frac{1}{2} < -x \leq -n$$

donc

$$-n < -x + \frac{1}{2} \leq -n + \frac{1}{2} < -n + 1$$

donc $-x + \frac{1}{2}$ est dans l'intervalle $[-n, -n + 1[$ avec $-n \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor = -n$. On a donc bien dans ce cas :

$$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = -\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor$$

— **2e cas** $n + \frac{1}{2} < x < n + 1$

On a d'une part :

$$n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2} < n + 2$$

donc $x + \frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $[n + 1, n + 2[$ avec $n + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$.

D'autre part, on a :

$$-n - 1 < -x < -n - \frac{1}{2}$$

donc

$$-n - 1 < -n - \frac{1}{2} < -x + \frac{1}{2} < -n$$

donc $-x + \frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $[-n - 1, n[$ avec $-n - 1 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor = -n - 1$. On a donc bien dans ce cas aussi :

$$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = -\lfloor -x + \frac{1}{2} \rfloor$$

2) La fonction $x \mapsto \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, donc $x \mapsto \frac{1}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^4}$ est paire sur cet ensemble.

Pour tout $x \geq \frac{1}{2}$, $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \geq x + \frac{1}{2} - 1 = x - \frac{1}{2}$.

Pour tout $A > 0$, on a donc :

$$\int_0^A \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx \leq \int_0^A \frac{1}{1 - (x + \frac{1}{2})^4} dx$$

et $\frac{1}{1 + (x - \frac{1}{2})^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$ donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx$

converge, donc par majoration de la fonction croissante $A \mapsto \int_0^A \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx$ par $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx$ on en déduit qu'elle admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$.

Par la parité de la fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on a également (car changer la valeur de la fonction en un nombre fini de points ne change pas la valeur de l'intégrale), pour tout $A < 0$:

$$\int_A^0 \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx = \int_0^{-A} \frac{1}{1 + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor^4} dx$$

donc converge lorsque $A \rightarrow -\infty$ car $-A \rightarrow +\infty$.

3) Il suffit de poser $\alpha = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^4} dx \right)^{-1}$ pour avoir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \alpha \times \alpha^{-1} = 1$.

De plus, f est positive sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en $\{\frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (petit arrangement avec le théorème au programme qui n'est pas assez général pour inclure ce cas)

4) a) On a $|x|f(x) \sim \frac{\alpha|x|}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^3}$ en $-\infty$ on a $|x|f(x) \sim \frac{\alpha}{|x|^3}$, donc par comparaison avec les intégrales convergentes

$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(-x)^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge donc X admet une espérance.

Sur l'intervalle $[-A, A]$, f est paire sauf en un nombre fini de points donc $x \mapsto xf(x)$ est impaire donc $\int_{-A}^A xf(x) dx =$

0 En passant à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$ on obtient $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = 0$.

- b) De même, $x^2 f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha x^2}{x^4} \sim \frac{\alpha}{x^2}$ et de même en $-\infty$. Par TCPIFP on en conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge.
D'après le théorème de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2)$ car $E(X) = 0$.
Pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A x^2 f(x) dx &= 2 \int_0^A x^2 f(x) dx && \text{par parité sauf en un nombre fini de points} \\ &= 2 \int_0^A \frac{x^2}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^2} dx \end{aligned}$$

Or pour tout $x \geq 0$, $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq x + \frac{1}{2}$ donc par passage à l'inverse et produit par $x^2 \geq 0$:

$$\frac{x^2}{1 + (\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor)^2} \geq \frac{x^2}{1 + (x + \frac{1}{2})^2}$$

Comme $\frac{x^2}{1 + (x + \frac{1}{2})^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^4} \sim \frac{1}{x^2}$ l'intégrale de droite converge et par passage à la limite on a bien

$$V(X) \geq 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + (x + \frac{1}{2})^2} dx$$

Correction de l'exercice 7 :

- f est continue sur $]-\infty; 0[$, sur $[0, 1]$ et sur $]1; +\infty[$, donc continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1.
 f est positive sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{c}{1+x} dx = c \ln 2$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \iff c = \frac{1}{\ln 2}$.
 f est donc une densité de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{\ln 2}$.
- Par définition on a pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$. On en déduit que Y est à valeur dans $[0, 1[$.
Ainsi :
 - Pour tout réel $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$
 - Pour tout réel $x \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 1$

Reste à étudier le cas où $x \in [0, 1[$. La famille $(\lfloor \frac{1}{X} \rfloor = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq x\right\} \cap \left\{\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \leq k + x\right\} \cap \left\{k \leq \frac{1}{X} < k + 1\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(k \leq \frac{1}{X} \leq k + x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{k + x} \leq X \leq \frac{1}{k}\right) && \text{car } \mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - c \ln\left(1 + \frac{1}{k + x}\right)\right) \\ &= c \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln(k + 1) - \ln(k)) - c \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln(k + x + 1) - \ln(k + x)) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(c \sum_{k=1}^N (\ln(k + 1) - \ln(k)) - c \sum_{k=1}^N (\ln(k + x + 1) - \ln(k + x))\right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} c(\ln(N+1) - \ln(1)) - (c \ln(N+x+1) - \ln(x+1))$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} c \ln \left(\frac{N+1}{N+x+1} \right) + c \ln(x+1)$$

$$= c \ln(1+x)$$

$$\text{car } \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{N+1}{N+x+1} \right) = \ln(1) = 0$$

On reconnaît la fonction de répartition de X donc Y suit la même loi que X .